

УДК 519.6: 536.24

Метод численного моделирования трехмерного тепло- и массообмена при различных режимах течения.

Н. И. Никитенко¹, Ю. Н. Кольчик², Н. Н. Сороковая³

¹ д.т.н., профессор, Институт технической теплофизики НАН Украины

² к.т.н., доцент, Киевский национальный университет строительства и архитектуры, yulia@orblink.kiev.ua

³ к.т.н., с.н.с. Институт технической теплофизики НАН Украины, n.sorokova@yandex.ua

Излагается метод численного моделирования динамики трехмерного течения и теплообмена вязкой жидкости на базе уравнений Навье-Стокса при ламинарном, переходном и турбулентном режимах движения. Результаты численного моделирования достаточно хорошо согласуются с опытными данными.

Ключевые слова: Трехмерное течение и теплообмен, переходной и турбулентный режимы движения, метод торможения скоростей изменения искомых функций.

Вступление. Математические модели для описания тепло- и массообменных процессов при турбулентном режиме конвекции обычно базируются на идее Рейнольдса об усреднении уравнений Навье – Стокса (RANS). Согласно этой идеи мгновенные значения скорости, давления, плотности и температуры представляются суммами их средних и пульсационных значений. В результате исходные уравнения Навье - Стокса с использованием некоторых дополнительных условий осреднения искомых функций во времени, преобразуются в уравнения относительно осредненных значений искомых функций. В осредненных уравнениях переноса пульсации скорости, температуры и концентрации компонента вызывают появление членов, которые трактуются как турбулентное трение, турбулентная теплопроводность и турбулентная диффузия.

Установление взаимосвязи между характеристиками осредненного и пульсационного переноса является достаточно сложной задачей. Ее решение сопряжено с необходимостью использования большого объема эмпирической информации, что приводит к снижению достоверности и универсальности получаемых результатов расчетов турбулентной конвекции. В последние годы все чаще высказывается заключение, что математическое моделирование процессов турбулентного течения и теплообмена на базе осредненных уравнений переноса импульса, массы и энергии является малоперспективным, и более предпочтительными представляются методы математического моделирования на основе исходных дифференциальных уравнений движения, неразрывности, тепло- и массопереноса [1–5].

Для численного решения задач естественной конвекции в двухмерной постановке при значительных числах Релея в работе [2] предлагается новый подход, который базируется непосредственно на уравнениях Навье-Стокса и методе торможения скоростей изменения искомых функций в некоторых узловых точках области, в которых эти скорости превышают допустимые с физической точки зрения значения. Идея метода торможения успешно использовалась при численном моделировании некоторых двумерных задач теплообмена при естественной [2] и вынужденной [3] конвекции несжимаемой и сжимаемой жидкости [4]. При моделировании течений на основе использования метода искусственной сжимаемости точность расчетов существенно снижается за счет того, что принимается постоянной во всей области течения характерная скорость, которая в действительности может существенно меняться в расчетной области.

В настоящей работе излагается метод численного моделирования динамики трехмерного течения и тепломассообмена вязкой жидкости при ламинарном, переходном и турбулентном режимах движения. Для расчета переходного и турбулентного режимов движения жидкости привлекается метод торможения скоростей изменения искомых функций.

Математическая модель и метод расчета. Система уравнений, описывающая трехмерное течение неоднородной жидкости и тепломассоперенос в приближении Буссинеска в переменных – вектор вихря ω , вектор потенциала ψ , температура T , концентрация примеси C , строится путем исключения из уравнений Навье-Стокса для несжимаемой жидкости функции давления [2], и может быть записана в декартовых координатах для случая, когда можно пренебречь учетом двойного электрического слоя, следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega_x}{\partial t} + u \frac{\partial \omega_x}{\partial x} + v \frac{\partial \omega_x}{\partial y} + w \frac{\partial \omega_x}{\partial z} - \omega_x \frac{\partial u}{\partial x} - \omega_y \frac{\partial u}{\partial y} - \omega_z \frac{\partial u}{\partial z} = \nu \left(\frac{\partial^2 \omega_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \omega_x}{\partial z^2} \right) + \\ + g\beta_T \left(\frac{g_z}{g} \frac{\partial T}{\partial y} - \frac{g_y}{g} \frac{\partial T}{\partial z} \right) + g\beta_C \left(\frac{g_z}{g} \frac{\partial C}{\partial y} - \frac{g_y}{g} \frac{\partial C}{\partial z} \right), \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega_y}{\partial t} + u \frac{\partial \omega_y}{\partial x} + v \frac{\partial \omega_y}{\partial y} + w \frac{\partial \omega_y}{\partial z} - \omega_x \frac{\partial v}{\partial x} - \omega_y \frac{\partial v}{\partial y} - \omega_z \frac{\partial v}{\partial z} = \nu \left(\frac{\partial^2 \omega_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \omega_y}{\partial z^2} \right) + \\ + g\beta_T \left(\frac{g_x}{g} \frac{\partial T}{\partial z} - \frac{g_z}{g} \frac{\partial T}{\partial x} \right) + g\beta_C \left(\frac{g_x}{g} \frac{\partial C}{\partial z} - \frac{g_z}{g} \frac{\partial C}{\partial x} \right), \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega_z}{\partial t} + u \frac{\partial \omega_z}{\partial x} + v \frac{\partial \omega_z}{\partial y} + w \frac{\partial \omega_z}{\partial z} - \omega_x \frac{\partial w}{\partial x} - \omega_y \frac{\partial w}{\partial y} - \omega_z \frac{\partial w}{\partial z} = \nu \left(\frac{\partial^2 \omega_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \omega_z}{\partial z^2} \right) + \\ + g\beta_T \left(\frac{g_y}{g} \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{g_x}{g} \frac{\partial T}{\partial y} \right) + g\beta_C \left(\frac{g_y}{g} \frac{\partial C}{\partial x} - \frac{g_x}{g} \frac{\partial C}{\partial y} \right), \end{aligned} \quad (3)$$

$$\frac{\partial^2 \Psi_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi_x}{\partial z^2} = \omega_x, \quad (4)$$

$$\frac{\partial^2 \Psi_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi_y}{\partial z^2} = \omega_y, \quad (5)$$

$$\frac{\partial^2 \Psi_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi_z}{\partial z^2} = \omega_z, \quad (6)$$

$$\rho c_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + w \frac{\partial T}{\partial z} \right) = \lambda \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right), \quad (7)$$

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u \frac{\partial C}{\partial x} + v \frac{\partial C}{\partial y} + w \frac{\partial C}{\partial z} = D \left(\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} \right), \quad (8)$$

$$\omega_x = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}, \quad \omega_y = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \omega_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (9)$$

$$u = \frac{\partial \Psi_z}{\partial y} - \frac{\partial \Psi_y}{\partial z}, \quad v = \frac{\partial \Psi_x}{\partial z} - \frac{\partial \Psi_z}{\partial x}, \quad w = \frac{\partial \Psi_y}{\partial x} - \frac{\partial \Psi_x}{\partial y}, \quad (10)$$

Здесь t – время; u, v, w – составляющие скорости в проекции на оси декартовых координат x, y, z ; $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ – составляющие вектора вихря; Ψ_x, Ψ_y, Ψ_z – составляющие векторного потенциала; T – температура; C – объемная концентрация компонента; ν – коэффициент кинематической вязкости; g – ускорение, создаваемое массовыми силами; β_T – температурный коэффициент объемного расширения; β_C – диффузионный коэффициент объемного расширения; ρ – плотность среды; c_p – удельная теплоемкость; λ – коэффициент теплопроводности; D – коэффициент диффузии.

Граничные условия для уравнений (1) – (6) записываются в предположении, что компоненты вектора скорости на внешних границах области являются заданными. Для области с непроницаемыми стенками значения компонентов вектора скорости в соответствии с условием прилипания равны нулю. Следует отметить, что процессы тепло- и массообмена при естественной конвекции в ограниченном пространстве встречаются во многих технических и биологических объектах. Также они происходят в помещениях зданий.

Для случая, когда область имеет форму параллелепипеда и его стенки непроницаемы, граничные условия уравнений (1) – (3) для составляющих вектора вихря с учетом уравнений (9) записываются следующим образом

$$\omega_x = 0, \quad \omega_y = -\frac{\partial w}{\partial x}, \quad \omega_z = \frac{\partial v}{\partial x} \quad \text{при } x = const; \quad (11)$$

$$\omega_x = \frac{\partial w}{\partial y}, \quad \omega_y = 0, \quad \omega_z = -\frac{\partial u}{\partial y} \quad \text{при } y = const; \quad (12)$$

$$\omega_x = -\frac{\partial v}{\partial z}, \quad \omega_y = \frac{\partial u}{\partial z}, \quad \omega_z = 0, \quad \text{при } z = const. \quad (13)$$

Граничные условия на стенке с прилипанием уравнений (4) – (6) для составляющих векторного потенциала с учетом выражений (10) имеют следующий вид [6]

$$\frac{\partial \psi_x}{\partial x} = 0, \quad \psi_y = 0, \quad \psi_z = 0 \quad \text{при } x = const; \quad (14)$$

$$\psi_x = 0, \quad \frac{\partial \psi_y}{\partial y} = 0, \quad \psi_z = 0 \quad \text{при } y = const; \quad (15)$$

$$\psi_x = 0, \quad \psi_y = 0, \quad \frac{\partial \psi_z}{\partial z} = 0, \quad \text{при } z = const. \quad (16)$$

Для уравнений переноса энергии (7) и переноса массы вещества (8) могут быть заданы граничные условия тепло и массообмена первого, второго и третьего рода.

Для решения системы уравнений (1) – (10) при заданных краевых условиях предлагается явный разностный метод, излагаемый ниже для случая, когда область, в которой протекают процессы трехмерного течения и тепло-массообмена, представляет собой прямоугольный параллелепипед с непроницаемыми стенками. Для аппроксимации дифференциальных уравнений разностными вводится пространственно-временная сетка с координатами

$$x_i = ih_x, \quad y_j = jh_y, \quad z_m = mh_z, \quad t_n = nl, \quad (17)$$

где h_x, h_y, h_z — шаги по координатам x, y, z ; l — шаг по времени; $i = 0, 1, \dots, I; j = 0, 1, \dots, J; m = 0, 1, \dots, M; n = 0, 1, \dots$; $x_I = X, y_J = Y, z_M = Z$.

Численное решение уравнений переноса вихря, энергии и массы проводится на основе трехслойной пересчетной разностной схемы Никитенко, предложенной в [7]. При этом дифференциальному уравнению переноса ставятся в соответствие два разностных уравнения и искомая функция на каждом временном шаге вычисляется в двух приближениях. Разностное уравнение для первого приближения является двухслойным. Оно аппроксимирует неполное уравнение переноса, в котором сохраняются только конвективные члены и временная производная. Для второго приближения используется трехслойное разностное уравнение, строящееся путем аппроксимации всех членов исходного дифференциального уравнения. В соответствии с этой схемой разностные уравнения, аппроксимирующие уравнение (1) переноса вихря в проекции на ось x и уравнение переноса энергии (7) записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} & \delta_i \bar{\omega}_x + u \delta_x \omega_x + v \delta_y \omega_x + w \delta_z \omega_x - \omega_x \delta_x u - \omega_y \delta_y u - \omega_z \delta_z u = \\ & = g\beta_T \left(\frac{g_z}{g} \delta_y T - \frac{g_y}{g} \delta_z T \right) + g\beta_C \left(\frac{g_z}{g} \delta_y C - \frac{g_y}{g} \delta_z C \right), \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} & (1 + \Omega_\omega) \delta_i \omega_x - \Omega_\omega \delta_i \omega_x^{n-1} + u \delta_x \omega_x + v \delta_y \omega_x + w \delta_z \omega_x - \omega_x \delta_x u - \omega_y \delta_y u - \omega_z \delta_z u = \\ & = (v \delta_{xx} \bar{\omega}_x + \delta_{yy} \bar{\omega}_x + \delta_{zz} \bar{\omega}_x) + g\beta_T \left(\frac{g_z}{g} \delta_y \bar{T} - \frac{g_y}{g} \delta_z \bar{T} \right) + g\beta_C \left(\frac{g_z}{g} \delta_y \bar{C} - \frac{g_y}{g} \delta_z \bar{C} \right); \end{aligned} \quad (19)$$

$$\delta_t \bar{T} + u \delta_x T + v \delta_y T + w \delta_z T = 0, \quad (20)$$

$$(1 + \Omega_T) \delta_t T - \Omega_T \delta_t T^{n-1} + u \delta_x T + v \delta_y T + w \delta_z T = (\delta_{xx} \bar{\omega}_x + \delta_{yy} \bar{\omega}_x + \delta_{zz} \bar{\omega}_x) \kappa / (c_p \rho). \quad (21)$$

В разностных уравнениях (18) – (21) искомые сеточные функции $\phi_{i,j,m}^n$ и $\bar{\phi}_{i,j,m}^{n+1}$ ($\phi = \omega_x, \omega_y, \omega_z, u, v, w, T, C$) для точки (x_i, y_j, z_m, t_n) записаны для простоты без индексов, т.е. $\phi = \phi_{i,j,m}^n$, $\bar{\phi} = \bar{\phi}_{i,j,m}^{n+1}$; Ω_ϕ ($\phi = \omega, T, C$) – весовой параметр разностного уравнения; $\delta_t \phi^n = (\phi_{i,j,m}^{n+1} - \phi_{i,j,m}^n) / l$; $\delta_t \bar{\phi} = (\bar{\phi}_{i,j,m}^{n+1} - \phi_{i,j,m}^n) / l$; $\delta_x \phi = (\phi_{i+1,j,m}^n - \phi_{i-1,j,m}^n) / (2h_x)$; $\delta_{xx} \phi = (\phi_{i+1,j,m}^n + \phi_{i-1,j,m}^n - 2\phi_{i,j,m}^n) / h_x^2$. Разностные аппроксимации дифференциальных уравнений (2), (3) и (8) записываются аналогично (18), (19) и (20), (21).

Необходимые условия устойчивости решения разностных уравнений находятся при помощи метода условного задания некоторых искомых функций [8]. При $\Omega_\phi^n = 0$, когда уравнения (19), (21) являются двухслойными [7], шаг по времени l должен удовлетворять условие

$$l \leq \min\{l_V, l_\omega, l_T, l_C\}, \quad (22)$$

$$\text{где } l_V = (u_{ijm}^n / h_x + v_{ijm}^n / h_y + w_{ijm}^n / h_z)^{-1}, \quad l_\omega = [2v(1/h_x^2 + 1/h_y^2 + 1/h_z^2)]^{-1},$$

$$l_T = [2(1/h_x^2 + 1/h_y^2 + 1/h_z^2) \kappa / (c_p \rho)]^{-1}, \quad l_D = [2D(1/h_x^2 + 1/h_y^2 + 1/h_z^2)]^{-1}.$$

Если $l_V > l_\gamma = \min\{l_\omega, l_T, l_C\}$, тогда можно найти такие значения параметров Ω_ϕ^n , при которых шаг по времени $l = l_V$. Согласно условию устойчивости явной трехслойной разностной схемы это достигается, когда [7] $\Omega_\phi = (l_V / l_\phi - 1) / 2$. Если $l_V / l_\phi \leq 1$, тогда следует положить $\Omega_\phi = 0$.

Уравнения (4) – (6) для составляющих векторного потенциала ψ_x, ψ_y, ψ_z решаются на каждом временном слое методом установления с использованием трехслойной явной разностной схемы [7]. На сетке, отличающейся от (17) тем, что вместо реального времени t , вводится дискретная переменная $\tau_k = kl_\psi$, $k = 0, 1, 2, \dots$, $l_\psi > 0$, разностная аппроксимация уравнения (4) может быть записана в виде

$$(1 + \Omega_\psi) \delta_t \psi_{xijm}^k - \Omega_\psi \delta_t \psi_{xijm}^{k-1} = \delta_{xx} \psi_{xijm}^k + \delta_{yy} \psi_{xijm}^k + \delta_{zz} \psi_{xijm}^k - \omega_{xijm}^{n+1}, \quad (23)$$

где Ω_ψ – весовой параметр, $\Omega_\psi \geq 0$. Значения весового параметра Ω_ψ находятся в соответствии с условиями устойчивости уравнения (23) [7]:

$$\Omega_\psi = (l_\psi / l_{\psi 0} - 1) / 2 \quad \text{при } l_\psi > l_{\psi 0}; \quad \Omega_\psi = 0 \quad \text{при } l_\psi \leq l_{\psi 0}, \quad (24)$$

причем величина временного шага $l_{\psi 0} = [2(1/h_x^2 + 1/h_y^2 + 1/h_z^2)]^{-1}$ отвечает условию устойчивости явной двухслойной разностной схемы, являющейся предельным случаем трехслойной схемы при $\Omega_{\psi} = 0$. Процесс установления решения уравнения (23) считается завершенным при удовлетворении условия

$$\sum_i \sum_j \sum_m (\psi_{xijm}^{k+1} - \psi_{xijm}^k) / l_{\psi 0} \leq \Delta, \quad (25)$$

где Δ – малое положительное число. В этом случае полагается, что $\psi_{xijm}^{n+1} = \psi_{xijm}^{k+1}$. В качестве начального приближения, отвечающего значению $k = 0$, принимается $\psi_{ijm}^k = \psi_{ijm}^n$. Численные эксперименты показали, что максимальная скорость установления решения уравнения (23) достигается при значениях $\Omega_{\psi} = 2 \div 2,5$, которым отвечает увеличение временного шага по сравнению с максимальным для явной двухслойной схемы в 5-6 раз.

Значения ψ_x в граничных узловых точках на слое $k+1$, в соответствии с условиями (14) – (16), определяются по следующим сеточным уравнениям

$$\psi_{x,1,j,m}^{k+1} = (4\psi_{x,2,j,m}^{k+1} - \psi_{x,3,j,m}^{k+1})/3, \quad \psi_{x,l,j,m}^{k+1} = (4\psi_{x,l-1,j,m}^{k+1} - \psi_{x,l-2,j,m}^{k+1})/3, \quad (26)$$

$$\psi_{x,i,0,m}^{k+1} = \psi_{x,i,j,m}^{k+1} = \psi_{x,i,j,0}^{k+1} = \psi_{x,i,j,M}^{k+1} = 0. \quad (27)$$

Уравнения (26) аппроксимируют первое из условий в (14) с погрешностью порядка $O(h_x^2)$.

Сеточные функции ψ_{yijm}^{n+1} и ψ_{zijm}^{n+1} на временном слое $n+1$ определяются с использованием уравнений, которые строятся так же, как и уравнения (23) – (27) при нахождении ψ_{xijm}^{n+1} .

Температура T и концентрация C в граничных узловых точках при условиях теплообмена первого рода считаются заданными. При граничных условиях второго и третьего рода входящие в эти условия производные $\partial T / \partial \zeta$ и $\partial C / \partial \zeta$, где ζ — нормаль к граничной поверхности, заменяются односторонними разностными отношениями, которые, как и разностные уравнения (26), (27), имеют погрешность порядка $O(h_x^2)$. Составляющие вектора скорости u_{ijm}^{n+1} , v_{ijm}^{n+1} и w_{ijm}^{n+1} во внутренних узловых точках области определяются по разностным уравнениям, аппроксимирующим выражения (10):

$$u_{ijm}^{n+1} = \delta_y \psi_{zijm}^{n+1} - \delta_z \psi_{yijm}^{n+1}, \quad v_{ijm}^{n+1} = \delta_z \psi_{xijm}^{n+1} - \delta_x \psi_{zijm}^{n+1}, \quad w_{ijm}^{n+1} = \delta_x \psi_{yijm}^{n+1} - \delta_y \psi_{xijm}^{n+1}. \quad (28)$$

Цикл вычислений на слое $n+1$ завершается определением значений составляющих векторного потенциала ψ_x , ψ_y , ψ_z в граничных узловых точках по разностным уравнениям, аппроксимирующим условия (11) – (13) с погрешностью порядка $O(h_x^2 + h_y^2 + h_z^2)$. Для узловых точек, расположенных на плоскостях $x = 0$ и $x = X$ эти уравнения имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \omega_{x,1,j,m}^{n+1} = 0; \omega_{y,1,j,m}^{n+1} = -\frac{4w_{2,j,m}^{n+1} - w_{3,j,m}^{n+1}}{2h_x}, \omega_{z,1,j,m}^{n+1} = \frac{4v_{2,j,m}^{n+1} - v_{3,j,m}^{n+1}}{2h_x} \quad \text{при } x=0, \quad (29) \\ \omega_{x,l,j,m}^{n+1} = 0; \omega_{y,l,j,m}^{n+1} = \frac{4w_{l-1,j,m}^{n+1} - w_{l-2,j,m}^{n+1}}{2h_x}, \omega_{z,l,j,m}^{n+1} = -\frac{4v_{l-1,j,m}^{n+1} - v_{l-2,j,m}^{n+1}}{2h_x} \quad \text{при} \\ x=X. \quad (30) \end{aligned}$$

Для точек, расположенных на плоскостях $y=0$, $y=Y$ и $z=0$, $z=Z$, разностные аппроксимации граничных условий (12) – (13) записываются аналогично выражениям (29), (30).

Процессы тепло- и массообмена при естественной конвекции в ограниченном пространстве встречаются во многих технических и биологических объектах, в светопрозрачных ограждающих конструкциях. Для практических приложений представляет интерес случай переноса энергии и массы через щелевые прослойки, заполненные жидкостью или газом. Температуры и концентрации примеси T_1 , C_1 вблизи левой стенки щели и T_2 , C_2 вблизи правой стенки принимаются обычно постоянными. Для характеристики процессов тепло- и массообмена используются следующие критерии подобия: $Gr = g\beta X^3(T_2 - T_1)/\nu^2$ – число Грасгофа; $Gr_D = g\beta_C X^3(C_2 - C_1)/\nu^2$ – диффузионное число Грасгофа; $Pr = \nu c_p/\lambda$ – число Прандтля; $Sc = \nu/D$ – число Шмидта; $Ra = GrPr$ – число Рейля. За характерный размер принимается толщина прослойки X .

Локальные значения теплового потока изменяются по поверхности стенки щели вследствие сложной вихревой структуры течения в прослойке. В связи с этим при обобщении экспериментальных или численно найденных данных вводится эквивалентный коэффициент теплопроводности λ_{eq} . Отношение $\varepsilon_k = \lambda_{eq}/\lambda$, где λ – коэффициент теплопроводности среды, заполняющей прослойку, характеризует влияние конвекции на перенос энергии через щель при различных Ra .

Предотвращение развития неустойчивости численного решения при значениях числа Рейля, которым отвечает переходной или турбулентный режим течения, может быть достигнуто путем наложения на временные производные от искомых функций в некоторых узловых точках области, в которых эти скорости превышают допустимые значения, ограничений следующего вида:

$$\frac{\partial W}{\partial t} = A_W \frac{\partial W}{\partial t} \bigg|_{\partial W}, \text{ если } \left| \frac{\partial W}{\partial t} \right| > A_W, \quad W = u, v, w, \omega_x, \omega_y, \omega_z, T, C. \quad (31)$$

Здесь A_W – положительная величина, которая может быть выбрана исходя из требования минимизации числа узловых точек B_W , в которых на данном временном слое реализуется условие (31).

Степень влияния ограничения (31) на результаты решения характеризуется величиной b_W , определяемой как отношение числа узловых точек B_W , в которых производится ограничение скорости роста функции W на временном слое n , к общему числу узлов разностной сетки – $B = I \times J \times M$. Численные эксперименты

показали, что A_W слабо зависит от числа узловых точек пространственной сетки, геометрических параметров области течения и числа Ra . При расчете турбулентного переноса относительное число $b_W = B_W / B$ узлов, в которых осуществляется коррекция скорости, вначале достаточно быстро возрастает, затем, достигнув максимума, монотонно снижается. По мере уменьшения шагов разностной сетки все более мелкомасштабные вихри оказываются учтенными при численном решении уравнений (1) – (10) и это приводит к снижению величины b_W . Для достижения лучшего согласования результатов расчета эквивалентного коэффициент теплопроводности λ_{eq} с опытными данными, целесообразно в режиме развитой ламинарной конвекции (при $Ra \leq 10^5$) ограничивать скорости изменения функции u, v, w, T, C , а при переходном и турбулентном режиме – функции $\omega_x, \omega_y, \omega_z, T, C$.

Результаты конкретных расчетов иллюстрируются на примере тепловой конвекции в замкнутой щелевой области в виде параллелепипеда. Две вертикальные стенки области, образующие щель, имеют постоянные температуры T_1 на левой и T_2 на правой стенке. Остальные грани теплоизолированы.

На рис.1 приведены данные о зависимости величины ϵ_k от числа Рэлея, которые получены в результате численного решения (они представлены точками ●) и путем обобщения уравнения подобия [9] экспериментальных результатов Бояринцева, Муль-Рейера, Девиса, Бекмана, Крауссольда и др. для вертикальных и горизонтальных плоских щелей, кольцевых и сферических слоев, заполненных газом или капельной жидкостью. При определении чисел подобия принимается толщина прослойки, а за определяющую температуру — величина $\tilde{T} = (T_1 + T_2) / 2$. При малых значениях числа Рэлея ($Ra < 10^3$) величина $\epsilon_k \approx 1$, т.е. влияние конвекции практически не проявляется. При $10^3 < \epsilon_k < 10^6$ величина $\epsilon_k = 0,105 Ra^{0,3}$ (линия 1) и при $10^6 < \epsilon_k < 10^{10}$ величина $\epsilon_k = 0,40 Ra^{0,2}$ (линия 2). Михеевым для всей области значений $Ra > 10^3$ предлагается использовать зависимость $\epsilon_k = 0,18 Ra^{0,25}$ (линия 3).

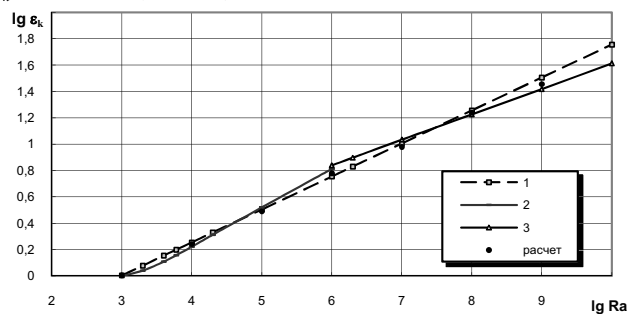


Рис.1– Эквивалентная теплопроводность ϵ_k слоя жидкости в зависимости от числа Рэлея

Из рис. 1 следует, что результаты численного моделирования течения и теплообмена достаточно хорошо согласуются с экспериментальными данными при различных режимах движения жидкости.

Выводы. 1. Представлена система уравнений, описывающая трехмерное течение неоднородной жидкости и тепломассоперенос в приближении Буссинеска в переменных – вектор вихря ω , вектор потенциала ψ , температура T , концентрация примеси C .

2. Для решения системы уравнений при заданных краевых условиях предлагается метод численного моделирования динамики трехмерного течения и тепломассообмена вязкой жидкости при ламинарном, переходном и турбулентном режимах движения. Для расчета переходного и турбулентного режимов движения жидкости привлекается метод торможения скоростей изменения искомым функций. Численное решение уравнений переноса вихря, энергии и массы проводится на основе трехслойной пересчетной разностной схемы Никитенко.

3. Результаты расчетов иллюстрируются на примере тепловой конвекции в замкнутой щелевой области в виде параллелепипеда. Результаты численного моделирования течения и теплообмена достаточно хорошо согласуются с экспериментальными данными при различных режимах движения жидкости.

Литература

1. Пасконов В.М., Полежаев В.И., Чудов Л.А. Численное моделирование процессов тепло- и массопереноса. – Москва: Наука, –1984. –288 с.
2. Никитенко Н. И., Кольчик Ю. Н., Сорокова Ю.Н. Метод канонических элементов для моделирования гидродинамики и тепломассообмена в областях произвольной формы. // Инженерно - физический журнал. –2002. –Т. 75, –№ 6. – С. 74–80.
3. Никитенко Н. И., Снежкин Ю.Ф., Сорокова Ю.Н., Кольчик Ю. Н. Численный метод моделирования тепло- и массообмена при различных режимах течения в канале с проницаемыми стенками. Инженерно - физический журнал. – 2006. –Т. 79, –№ 3. –С. 91–101.
4. Никитенко Н. И., Снежкин Ю.Ф., Сорокова Ю.Н., Кольчик Ю. Н. Метод расчета теплообмена при различных режимах течения вязкого сжимаемого газа. Промышленная теплотехника. –2007. –Т. 29, – № 5. –С. 17 – 23.
5. Калинин Э.К., Лобанов И.Е. Проблемы исследования теплообменных процессов при течении однофазных сред на этапе успешного развития численного моделирования. Тезисы докладов и сообщений VI Минского международного форума по тепло- и массообмену. –2008. – Т.1. –С. 101–103.
6. Роуч П. Вычислительная гидродинамика.-Москва: Мир, –1980.– 616 с.
7. Никитенко Н.И. Сопряженные и обратные задачи тепломассопереноса. –Киев: Наукова думка, –1988. –240 с.
8. Никитенко Н.И. Теория тепломассопереноса. -Киев: Наукова думка, – 1983. –352 с.
9. Исаченко В.П., Оситова В.А., Сукомел А.С. Теплопередача.-Москва: Энергия, –1975.– 488 с.

Метод чисельного моделювання тривимірного тепло- і масообміну при різних режимах течії.

М.І.Нікітенко, Ю.М.Кольчик, Н.М.Сорокова.

Наведено метод чисельного моделювання динаміки тривимірної течії і тепломасообміну в'язкої рідини на базі рівнянь Нав'є-Стокса при ламінарному, перехідному і турбулентному режимах руху. Результати чисельного моделювання достатньо добре узгоджуються з дослідними даними.

Ключові слова: Тримірна течія і тепломасообмін, перехідний і турбулентний режими руху, метод гальмування швидкостей зміни шуканих функцій

Method of numerical modeling of three-dimensional heat and mass transfer for different flow modes.

N.Nikitenko, Y.Kolchik, N.Sorokovaya

Presented a method for the numerical simulation of the dynamics of three-dimensional flow and heat and mass transfer of a viscous fluid on the basis of the Navier-Stokes equations for laminar, transitional and turbulent regimes of movement. The results of the numerical simulation is sufficiently good agreement with the experimental data.

Keywords: Three-dimensional flow and heat and mass transfer, transition and turbulent motion, the method of braking rates of change of the desired functions

Надійшла до редакції 22.04.2015 р.